Variable Compleja I
Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 10 de Junio de 2024.

Duración 3.5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2}\, dt.$$

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.
2. Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1 + at)e^{-at}.$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Probar que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ que diverge en cero y en infinito tiene al menos un cero. Probar además que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad).

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Probar el *Lema de Schwarz*.

Lema (de Schwarz)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Probar que $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.*

Observación. Para cada $0 < r < 1$, estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = f(z)/z$ para cada $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2}\, dt.$$

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.

   Definimos la siguiente función:

   $$\begin{array}{rccc} \Phi: & [1,2] \times \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (t,z) & \longmapsto & \dfrac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2} \end{array}$$

   Veamos en primer lugar que Φ está bien definida. El denominador no se anula puesto que $n, t > 0$, por lo que veamos que $nz + t^2 \neq 0$. Tenemos que:

   $$nz + t^2 = 0 \iff z = -\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}^-$$

   Por tanto, $nz + t^2 \neq 0$ para todo $t \in [1, 2]$ y $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Así que Φ está bien definida. Por tanto, Φ es continua en su dominio. Fijado ahora $t \in [1, 2]$, veamos que la función $z \mapsto \Phi(t, z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Para ello, es necesario ver que $nz + t^2 \notin \mathbb{R}^-$. Supongamos que $nz + t^2 \in \mathbb{R}^-$, por lo que $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que:

   $$nz + t^2 = -r \iff z = -\frac{t^2 + r}{n} \in \mathbb{R}^-.$$

   Esto es una contradicción, ya que $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Por tanto, $nz + t^2 \notin \mathbb{R}^-$. Por tanto, hemos visto que, fijado $t \in [1, 2]$, la función $\Phi(t, \cdot)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Por tanto, por el Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de un parámetro, tenemos que:

   $$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

   Puesto que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, buscamos aplicar el Teorema de Convergencia de Weierstrass. Para ello, sea $K \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ compacto. Tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in K$:

   $$|f_n(z)| = \left| \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2}\, dt \right| \leqslant \sup \left\{ \left| \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2} \right| : t \in [1, 2] \right\}$$

   Veamos ahora qué acotaciones realizar.

   $$\begin{aligned} |n^2 + t^2| &\geqslant n^2 + 1^2 = n^2 + 1 \\ |\log(nz + t^2)| &= |\ln|nz + t^2| + i \arg(nz + t^2)| \leqslant \ln|nz + t^2| + |\arg(nz + t^2)| \leqslant \\ &\leqslant \ln(n|z| + 4) + \pi \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que el logaritmo real es creciente y el argumento principal está acotado por π. Como K es compacto, como el módulo es una función continua existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \max\{|z| : z \in K\} > 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1}$$

Veamos ahora que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1}$ converge. Tenemos que, para n suficientemente grande, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1} \leqslant \frac{\ln(n(M+1))+\pi}{n^2} &= \frac{\ln(n)+\ln(M+1)+\pi}{n^2} = \\
&= \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(M+1)+\pi}{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} + \frac{\ln(M+1)+\pi}{n^2} = \\
&= \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{\ln(M+1)+\pi}{n^2} \qquad \forall n \geqslant 4
\end{aligned}$$

Como $2, 3/2 > 1$, ambas series sabemos que son convergentes. Por tanto, la serie en cuestión es convergente. Por el Test de Weierstrass, tenemos que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en K.

Por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, tenemos que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)e^{-at}.$$

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2 + a^2 = 0 \implies x^2 = -a^2 \implies x \in A := \{-ai, ai\}.$$

Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{C} \setminus A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & z & \longmapsto & \dfrac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}
\end{array}$$

Notemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$, y que $A' = \emptyset$, por lo que podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Como $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para cualquier ciclo Σ en $\mathbb{C} \setminus A$.

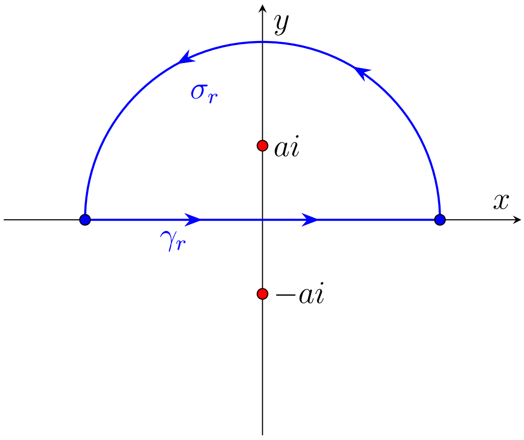

Figura 1: Ciclo de integración Σ_R del Ejercicio 2.

Para todo $R > a$, consideramos el siguiente ciclo $\Sigma_R = \gamma_R + \sigma_R$, representado en la Figura 1, donde:

$$\begin{array}{rrcl} \gamma_R: & [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_R: & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in A} \operatorname{Res}(f, z_0) \operatorname{Ind}_{\Sigma_R}(z_0)$$

Calculemos la primera integral que nos ha resultado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz$$

Notemos que la integral pedida es la parte real de la integral. Veamos la siguiente integral:

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \leqslant \pi R \cdot \sup\left\{\left|\frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}\right| : z \in \sigma_R^*\right\} \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^2}$$

donde hemos usado que, si $z \in \sigma_R^*$, entonces $|z| = R$ y, como $R > a > 0$, tenemos que $R^2 > a^2$, por lo que:

$$\begin{aligned} |z^2+a^2| &\geqslant \big||z^2|-|a^2|\big| = \left|R^2-a^2\right| = R^2-a^2 \\ |e^{itz}| &= e^{-t\operatorname{Im}(z)} \leqslant e^0 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, como la expresión anterior es válida para cualquier $R > a$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Calculamos ahora los índices. Por la forma en la que se ha definido el ciclo Σ_R, para todo $R > a$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Sigma_R}(-ai) &= 0 \\ \operatorname{Ind}_{\Sigma_R}(ai) &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, tan solo hemos de calcular el residuo en el polo ai.

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\cdot\frac{e^{itz}}{[(z-ai)(z+ai)]^2} = \lim_{z\to ai}\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2(z-ai)} = +\infty.$$

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)^2 f(z) = \lim_{z\to ai}\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2} = \frac{e^{itai}}{(2ai)^2} = \frac{e^{-at}}{-4a^2} = -\frac{e^{-at}}{4a^2}\in\mathbb{C}^*$$

Por tanto, deducimos que el orden del polo ai es 2, y que el residuo es:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,ai) &= \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left((z-ai)^2f(z)\right) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2}\right) = \\ &= \lim_{z\to ai}\frac{ite^{itz}(z+ai)^2 - e^{itz}\cdot 2(z+ai)}{(z+ai)^4} = \lim_{z\to ai}\frac{ite^{itz}(z+ai)-2e^{itz}}{(z+ai)^3} = \\ &= \lim_{z\to ai} e^{itz}\frac{it(z+ai)-2}{(z+ai)^3} = e^{-at}\cdot\frac{it(2ai)-2}{(2ai)^3} = e^{-at}\cdot\frac{-at-1}{-4a^3i} = e^{-at}\cdot\frac{at+1}{4a^3i} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(e^{-at}\cdot\frac{at+1}{4a^3i}\cdot 1\right) = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-R}^{R}\frac{\operatorname{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > a$, podemos hacer $R\to+\infty$ y tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Igualando las partes reales, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Probar que una función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ que diverge en cero y en infinito tiene al menos un cero. Probar además que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad).

Como f diverge en el origen, sabemos que el 0 es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de f. Por tanto, $\exists \Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

donde $\Psi(0) \neq 0$. De esta forma:

$$\Psi(z) = z^k f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Puesto que conocemos el comportamiento de f en el infinito, sabemos que $\Psi(z)$ diverge en el infinito. Por tanto, como $\Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y Ψ diverge en el infinito, por el Corolario del Corolario del Teorema de Casorati, tenemos que Ψ es un polinomio. Como además f diverge en infinito, tenemos que el grado de Ψ es $m \in \mathbb{N}$, donde $m > k$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que Ψ tiene m raíces. Como sabemos que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

Sabemos que $Z(f) = Z(\Psi)$, y por tanto f tiene m ceros.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Probar el *Lema de Schwarz.*

Lema (de Schwarz)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Probar que $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.*

Observación. Para cada $0 < r < 1$, estimar convenientemente el valor del siguiente conjunto:

$$\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$$

donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = {}^{f(z)}/_{z}$ para cada $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$.

Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} f'(0) & \text{si } z = 0 \\ \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \in D(0,1) \setminus \{0\} \end{cases} \end{array}$$

Veamos que g es continua en el origen.

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = g(0).$$

Por tanto, g es continua en $D(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1) \setminus \{0\}$. Por el Teorema de Extensión de Riemman, $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$.

Fijado ahora $r \in]0,1[$, consideramos la restricción de g a $\overline{D}(0,r)$, y aplicamos el corolario del Principio del Módulo Máximo. Por tanto, tenemos que:

$$\text{máx}\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\} = \text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\} = \text{máx}\left\{\frac{|f(z)|}{|z|} : |z| = r\right\} \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} \text{máx}\left\{\frac{1}{|z|} : |z| = r\right\} = \frac{1}{r}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in D(0,1)$, por hipótesis del enunciado. Tomando límite con $r \to 1$, tenemos que:

$$\text{máx}\{|g(z)| : z \in D(0,1)\} = \text{máx}\left\{\frac{|f(z)|}{|z|} : z \in D(0,1)\right\} \leqslant 1 \Longrightarrow |f(z)| \leqslant |z| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Además, también tenemos que $|g(0)| = |f'(0)| \leqslant 1$. Por tanto, hemos probado que:

$$|f'(0)| \leqslant 1$$
$$|f(z)| \leqslant |z| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Por otro lado, si ocurre que $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces $\exists z_0 \in D(0,1)$ tal que:

$$|g(z)| \leqslant |g(z_0)| = 1 \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Como g es holomorfa en $D(0,1)$, por el Principio del Módulo Máximo, tenemos que g es constante. Por lo que $g(z) = \alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, y por tanto:

$$f(z) = \alpha z \qquad \forall z \in D(0,1) \setminus \{0\}.$$

Como además $f(0) = 0$, tenemos que:

$$f(z) = \alpha z \qquad \forall z \in D(0,1).$$